127 – Exponentielle de matrices. Applications.

E un K-ev de DF, K=R ou C

I) Généralités

Si on ne précise pas, A,B sont dans Mn(K)

1) Définition

Déf : exponentielle comme somme de série [Gou 184]

Rq : majoration en norme [Gou 184]

Csq : A->exp(A) est continue comme somme de série entière normalement convergente [Gou 184]

Prop : A->exp(A) est en fait C^1 [Rou 117] *(c'est un th de calcul diff qui dit que si f_k cv simplement vers f, et que Df_k(M) cv ds L(E ,F) uniformément pour x, alors la limite est différentienble et on intervertit. Là, exp(X) est limite de ses sommes partielles. C'est très pénible à calculer)*

Th : CH

Csq : exp(A) est en fait un polynôme en A, de degré au plus n. De plus, A et exp(A) commutent [MT58] *(attention : exp(A)=P_A(A), mais P_A dépend de A ; il n'existe pas de polynôme P tq pour tout M, exp(M)=P(M) : se ramener au cas n=1 et regarder les dérivées ; voit MT)*

ATTENTION : comme exp(A)=P_A(A), on ne peut pas conclure que exp est C^infini en tant que polynôme !!! C'est plus compliqué, il faut montrer que la fonction est analytique.

Rq : en fait, exp est C^infini.

2) Quelques propriétés

Prop : si A est triangulaire, on connait la tête de exp(A) [MT 58] *(car on connait la tête d'une puissance de matrice triangulaire)*

Prop : si AB=BA alors exp(A+B)=exp(A)exp(B) [MT 58] *(par le binôme de Newton ; sinon on peut pas l'appliquer. Réciproque fausse !! Il faut avoir exp(t(A+B))=exp(tA)exp(tB) pour tout t pour avoir AB=BA*

Csq : exp(A) est inversible et exp(A)^-1=exp(-A)

Prop :
Pexp(A)P^-1=exp(PAP^-1)
t(exp(A))=exp(tA) ; (expA)*=exp(A*) [MT 58] *(csq du fait que exp(A) est un polynôme en A)*

Prop : det(exp(A))=exp(tr(A)) [MT 58] *(on trigonalise A, on a que det(exp(A))=det(Pexp(T)P^-1)=det(exp(T))=produit des exp des vp=exp(somme des vp)=exp(tr(A)))*

Csq : exp(A) est inclus dans GLn(K).

3) Calcul effectif

Lemme : lemme des noyaux + les projecteurs sur un noyau par rapport aux autres est un polynôme en u [Gou 175 + Gou 194]

Th : Dunford (nécessite le poly caract scindé) *Comme on sait que les projecteurs p_i sont des polynômes en f, on pose d=sum(lambda_i*p_i), et n=f-d.*

Une appl : calculer une exp de matrice sur un exemple. *Si une matrice vérifie (A-Id)(A-2Id)=0, on note p la proj sur Ker(A-Id) parallèlement à Ker(A-2Id) et q=Id-p. Alors exp(A)=exp(A)p+exp(A)q. Or exp(A)p=exp(2Id)exp(A-2Id)p=exp(2)*sum((A-2Id)^n/n!)p=exp(2)p car (A-2Id)op=0. Exp(A)q=exp(1)exp(A-Id)q=e(Id+A-Id)q=eAq. Par Bézout, 1=a(X)(X-1)+b(x)(X-2), on peut calculer a et b. En combinant Bézout avec p+q=1, on trouve p et q, et donc exp(A).* [Mn 23]

Appl : calcul de puissance (formule binôme) et d'exponentielle [Gou 196]
Pour calculer l'exp, on écrit que *d=sum(lambda_i*p_i) et n=sum((f-lambda_i*Id)*p_i)*
*On a alors exp(d)=sum(exp(lambda_i*p_i)) et on calcule aussi exp(n) en fonction des p_i. On finit par Dunford en disant que exp(f)=exp(d)exp(n), exprimé en fonction des p_i, qu'on peut calculer par DES et Bézout.*

4) Diagonalisation de l'exponentielle

Prop : Sp(exp(A))=exp(Sp(A)) *(trigonaliser A)*

Th : expA est diagonalisable ssi A l'est [BMP 215] *(exp(A)=exp(D+N)=exp(D)exp(N)=exp(D)(I+N')=exp(D)+exp(D)N' (on utilise Dunford et le fait que l'exp d'un nilpotent est unipotent). Reste à vérifier que exp(D) est diago, exp(D)N' est nilp, qu'ils commutent. Si A est diago alors exp(A) l'est, c'est clair. Si exp(A) est diago, la partie nilp de sa décomp de Dnford est nulle, donc exp(A)N' est nul, donc N' est nul donc A est diago)*

Appl : si A est dans Mn(C), exp(u)=Id ssi u est diagonalisable et si ses vp sont des multiples de 2i*Pi [BMP 215] *(assez immédiat)*

Appl : exp(A) diagonale ssi A diagonale *(interpolation)*

II) Image de l'exponentielle et inversion

1) Inversion de l'exponentielle

Prop : exp : Mn(K)->Mn(K) et exp :GLn(K)->Mn(K) ne sont pas injectives [MT 58] *(dans R et dans C on peut trouver plusieurs matrices tq exp(M)=In)*

Th : B(Id,1) la boule unité dans GLn(K). exp : B(Id,1) -> B (Id,1) est une bijection. L'inverse de l'exponentielle est le logarithme (définition en série) [MT 60] *(sur R, on sait que exp(ln(x))=x, ce qui veut dire que le produit des séries vaut x. Comme ce produit des séries est un calcul formel, ça fait la même chose pour des matrices)*

Prop : Exp : nilpotents -> unipotents est un homéo de réciproque log [MT 60] *(N nilp. exp(N)=I+N+…=I+N' où N' nilpotent. Le log est bien défini sur U. Vérifier que log(expX)=X. On vérifie que log(exp(tX))=tX pour tout t. Coïncide en 0, reste à voir qu'il y a même dérivée : c'est le cas. Montrons que exp(logB)=B. B=I+N. t->exp(log(I+tN))-(Id+tN) est un poly en t. D'après ce qui précède, exp(logX)=X dans un vois de Id dans l'ens des matrices nilp (TIL) donc le polynôme précédent est nul dans un vois de zéro, donc identiquement nul).*

2) Image de l'exponentielle

On a vu que exp : Mn(K)->GLn(K)

a) Cas complexe

Exp : Mn(C) -> GLn(C) est une surj [BMP 213] *(se sert de l'inversion sur les unipotents !! M dans GLn(C). Dunford : M=D+N, D a les même vp que M donc inversible. M=D(Id+D^-1N). Comme exp :C->C* est surj, pour chaque valeur propre lambda, il existe un mu tq exp(mu)=lambda. On définit Q le poly interpol de Lagrange qui passe des lambda_i aux mu_i. On a donc exp(Q(D))=D (calcul). Or D est un poly en M : D=P(M). Donc D=exp(QoP(M)). Etude de X=I+D^-1N : unipotente. X=exp(logX). Mq logX est un polynôme en M. Le poly caract de D a un coeff constant non nul car D inversible donc D^-1 est un poly en D, qui est lui-même un poly en M donc D^-1 est un poly en M. Dunford : N est un poly en M. Donc X aussi, donc logX aussi. logX=R(M). M=exp(QoP(M))exp(R(M))=exp(R+QoP(M)) gagné).*

Appl : A une matrice de Mn(C) et p un entier. Alors il existe B tq B^p=A *(on prend C tq exp(C)=A puis B=exp(1/p C))*

b) Cas réel

Rq : si A est dans Mn(R) alors det(exp(A))>0. Donc exp n'est pas une surjection de Mn(R) sur GLn(R) *(passer par det(exp(A))=exp(tr(A)))*

Question : exp : Mn(R)->GLn+(R) surj ? Non : -I_2 est dans GL2+(R) mais pas dans l'image de l'exp car vp negatives.

Th : exp : Mn(R) -> {matrices De GLn(R) qui admettent une racine carrée} est une surj [BMP 215] *(Se sert du cas complexe !! Rq : c'est clair pour n=1. Une inclusion claire : A dans exp(Mn(R)), A=expB. Alors A inversible et exp(B/2)²=A. Autre inclusion : A dans GLn(R) tq A=B². B est dans GLn(C) donc il existe un poly Q tq B=exp(Q(B)). B=conj(B)=exp(conjQ(B)). Q(B) et conjQ(B) commutent donc A=Bconj(B)=exp((Q+conjQ)(B)) et Q+conj(Q) est un poly réel donc c'est bon)*

III) Homéomorphismes et décomposition polaire

1) Décomposition polaire

Th : M dans GLn(R). M s'écrit de manière unique M=OS où O est dans O(n) et S dans Sn++ [MT 18] *(existence ? si M=OS alors tM=SO-1 et donc tMM=S². On doit avoir S racine de tMM. Or tMM dp donc on prend sa racine S. On pose O=MS^-1 qui appartient bien à O(n). Unicité ? Revient à montrer l'unicité de la racine de tMM. Si S' est une autre racine dp alors elle a même vp. P le poly qui passe de lambda_i à sqrt(lambda_i). P(tMM)=S=P(S'²) donc S S' commute avec P(S'²)=S, diago simult, égales)*

Th : M dans GLn(C). M=UH unique, U dans U(n), H dans Hn++ [MT 20]

Th : GLn(R) est homéo à O(n)xSn++ [MT 19] *((O,S)->OS appl continue. M_n=O_n.S_n dans GLn qui vs vers M=OS, mq O_n cv vers O et S_n cv vers S. O(n) compact donc soit O' une va de (O_n). La suite extraite S_n_k correspondante cv vers O'^-1M=S' donc M=O'S'. L'unicité de la décomp montre que O=O', S=S'. Il y a une seule v.a. donc ça converge)*

Th : GLn(C) est homéo à U(n)xHn++ [MT 20]

2) Homéomorphismes

Th : Exp : Hn->Hn++ est un homéo ; Exp : Sn->Sn++ est un homéo [MT 62] [Preuve plus rapide pour l'injectivité : DSerr 80] *(pour Hn : on vérifie que si A est dans Hn, exp(A) est dans Hn++. Surj ? B dans Hn++, B=PDP^-1, on prend D' la matrice diag avec les log des éléments de D, et alors exp(PD'P^-1)=A. Inj ? Si exp(A)=exp(B) alors A et B ont même vp. P le poly interpol de Lagrange qui envoie les exp(lambda_i) sur les lambda_i. A=P(exp(A))=P(exp(B)), or expB est un poly en B donc A est un poly en B donc A et B commutent et sont diago, donc diago simult avec mêmes vp donc égales. Continue ? Ok. Réciproque continue ? A_n une suite de matrices de Hn++ qui cv vers A. A_n=exp(B_n), A=exp(B). B_n cv vers B ? A_n converge la norme 2 (le rayon spectral) de A_n est borné : les vp sont contenues dans un compact. Pareil pour A_n^-1. Donc les vp sont comprises sans un segment [a,b] avec a>0. Les vp des B_n aussi car ce sont leurs log. Donc (B_n) est bornée pour la norme 2. Toutes ses va valent B. Donc B_n cv vers B)*

Csq : GLn(R) est homéo à O(n)xSn=O(n)*R^d ; GLn(C) est homéo à U(n)xHn=U(n)xR^d

3) Applications à l'étude de groupes topologiques

Csq : GLn(R) a deux CC, et GLn(C) est connexe [MT 35] *(csq directe de ce qui précède, U(n) est connexe par action sur la sphère)*

Th : O(n,C) homéo à O(n)*R^d [MT63] *(M dans O(n,C), M=UH. On montre que U est dans On et H=exp(iA) avec A antisym réelle)*

Th : soit G un sous groupe de GLn(C) stable par M->M* et tq pour tout élément de G∩Hn++, sqrt(M) reste dans G. Alors G est homéo à *(G)*∩ *U(*n))x(G∩Hn++) [DSerr 81] *(M dans G, décomp polaire M=UH. M* dans G donc MM*=H² dans G. Donc H est dans G, donc U aussi)*

Th : c'est le cas de O(p,q) et U(p,q).

Csq : O(p,q) est homéo à (O(p,q)∩O(n))x(O(p,q)∩Sn) homéo à O(p)xO(q)xR^pq ;
U(p,q) est homéo à (U(p,q)∩OU(n))x(U(p,q)∩Hn) homéo à U(p)xU(q)xR^pq [DSerr 82]

Th : O(p,q) a 4 composantes connexes ; les détailler [MT 107] + [DSerr 85]

IV) **<u>Autres applications</u>**

1) <u>Equa diff</u>

Th : Y'=AY. Un sfs de cette équation est donné par les colonnes de exp(tA)

En pratique, on réduit la matrice pour essayer de calculer exp(tA).

Csq : si A est diago, un sfs est (exp(lambda_i*t)*v_i) où v_i est un vp.

2) <u>Espaces tangents</u>

Prop : G un groupe muni d'une structure de sous variété où les opérations sont C^1. Alors son espace tangent en Id est égal à {X tq exp(tX) \in G pour tout t dans R} [MT 68] *(c'est en fait l'algèbre de Lie)*

Appl : on peut ainsi trouver des dimensions d'espaces tangents qui nous permettront d'aboutir à des isomorphismes exceptionnels. Ex : PSL_2(C) isomph à SO_3(C).

<u>Pas mis :</u>
GLn(K) n'a pas de sg arbitraitrement petit, cad qu'il existe un voisinage V de Id dans GLn(K) tq le seul groupe contenu dans V est {Id} [MT 59]
Calcul de la différentielle
Burnside ?
Liapounov ?
Groupes à un paramètre
Exponentielle C^infini
Sous groupes à un paramètre
Idée : peut-être restreindre l'étupe au cas réel (O(p,q) et pas U(p,q))

<u>Bibliographie :</u>
[MT] Mneimné-Testard
[Gou] Gourdon - Algèbre
[DSerr] Denis Serre – Les matrices
[BMP] Beck & Malik & Peyré - Objectif agrégation
[Rou] Rouvière - PGCD

<u>Développements :</u>
Image de l'exponentielle matricielle [BMP 213] (***)
Homéo entre S_n et S_n++ par l'exponentielle [MT 62] (***)
A diago ssi exp(A) diago [BMP 215] (***)

*<u>Rapport du jury (2004 à 2009)</u> : c'est une leçon difficile et ce n'est pas une leçon d'analyse. La décomposition de Dunford multiplicative (décomposition de Jordan) de exp(A) doit être connue. Les groupes à 1-paramètre peuvent trouver leurs places dans cette leçon. On peut s'interroger si ces sous-groupes constituent des sous-variétés fermées de GL(n,**R**). L'étude du logarithme (quand il est défini) trouve toute sa place dans cette leçon. Les applications aux équations différentielles doivent être évoquées sans constituer l'essentiel de la leçon. On pourra par exemple faire le lien entre réduction et comportement asymptotique. On pourra par exemple faire le lien entre réduction et comportement asymptotique. Les notions d'algèbres de Lie ne sont pas au programme de l'Agrégation, on conseille de n'aborder ces sujets qu'à condition d'avoir une certaine solidité. On fera attention aux choix des développements qui ne peuvent aller trop vers l'analyse. Dans le cas diagonalisable, les projecteurs sont utiles pour le calcul de l'exponentielle. On pourra par*

exemple essayer de calculer l'exponentielle de la matrice 4x4 triangulaire dont les coeff diagonaux sont 1,2,3,4. On pourra par exemple étudier, pour A dans Mat(n,C) l'application exponentielle de C[A]dans C[A] et montrer comment les notions topologiques peuvent intervenir utilement pour montrer que l'exponentielle est surjective de Mat(n,C) sur GL(n,C).